КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АЛЬ-ФАРАБИ

А.А. Темирбаев

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Сборник лекции для студентов и магистрантов
специальности «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»

Алматы, 2024

Аннотация

Коллективная динамика в больших ансамблях или сетях связанных осцилляторов или автоколебательных элементов является одной из основных проблем в нелинейной динамике. Она важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого спектра приложений в различных областях. В данном сборнике лекции изложены теоретические основы синхронизации и экспериментальные результаты автора по исследованию синхронизации в электронных ансамблях с глобальной и нелинейной связью.

Сборник лекции предназначен для студентов желающих ознакомиться с физическим феноменом – синхронизация.

Лекция 3. Математические модели синхронизации автоколебательных систем

Цель лекции: понять основные математические модели, описывающие синхронизацию автоколебательных систем. Рассмотреть ключевые уравнения, применяемые для анализа взаимодействия и синхронизации осцилляторов, а также методы решения таких уравнений.

1. Введение в математическое моделирование синхронизации

Автоколебательные системы представляют собой динамические системы, в которых колебания поддерживаются за счет внутренней энергии системы, без необходимости внешнего воздействия. Синхронизация возникает, когда такие системы начинают взаимодействовать, приводя к согласованию их колебательных параметров, таких как частота и фаза. Для описания и прогнозирования синхронизации в таких системах используются различные математические модели, которые позволяют описывать взаимодействие элементов системы и их переход к синхронизированному состоянию.

2. Уравнение фазовой синхронизации

Фазовая синхронизация описывает согласование фаз осцилляторов, при котором они поддерживают постоянную разность фаз, не изменяя собственную частоту. Это явление наблюдается в системах с близкими частотами и происходит под воздействием слабого взаимодействия. Основная формула для описания фазовой синхронизации двух осцилляторов с собственными частотами ω_1 и ω_2 выглядит так:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega - K\sin(\theta)$$

где:

- θ – разность фаз между двумя осцилляторами,
- $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$ – разность собственных частот,
- K – коэффициент взаимодействия между осцилляторами.

В уравнении синусоидальный член $K\sin(\theta)$ представляет собой силу, стремящуюся согласовать фазы осцилляторов, что в итоге приводит к фазовой синхронизации. Если K достаточно велико, синхронизация становится устойчивой, и система остается в фазовом согласовании.

3. Модель Куромото

Модель Куромото, предложенная японским ученым Ёсихиро Куромото в 1975 году, является одним из наиболее популярных методов описания синхронизации в системе с большим числом осцилляторов. Модель Куромото основана на уравнении:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i)$$

где:

- θ_i – фаза i-го осциллятора,
- ω_i – собственная частота i-го осциллятора,
- K – параметр связи, который определяет силу взаимодействия между осцилляторами,
- N – общее число осцилляторов.

Модель Куромото позволяет изучать, как в системе из большого числа осцилляторов может возникнуть синхронизированное состояние. При низких значениях параметра K осцилляторы колеблются независимо, но по мере увеличения K осцилляторы начинают синхронизироваться и достигать коллективного состояния, при котором большинство осцилляторов колеблются с одной и той же фазой. В модели Куромото коэффициент связи K определяет фазовый переход от несинхронизированного состояния к синхронизированному.

4. Уравнение Ван дер Поля

Уравнение Ван дер Поля было впервые предложено для описания работы электронного генератора и представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

где:

- x – амплитуда колебаний,
- ω – собственная частота системы,
- μ – параметр, определяющий нелинейное затухание.

При наличии взаимодействия между двумя осцилляторами Ван дер Поля уравнение дополняется членом связи, представляющим взаимодействие:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - \mu(1 - x_1^2)\frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 = \alpha(x_2 - x_1)$$

где α – коэффициент взаимодействия. Параметр μ контролирует режим колебаний: при малых значениях μ колебания почти гармонические, но с увеличением μ система демонстрирует значительные отклонения от синусоидальной формы, что приводит к сложному взаимодействию и возможной синхронизации с другим осциллятором.

5. Фазовое уравнение осцилляторов Пескина

Эта модель, разработанная Чарльзом Пескином, описывает синхронизацию биологических ритмов, таких как сердечный ритм и дыхание. В модели используется набор из N осцилляторов, каждый из которых влияет на других. Для описания фазового взаимодействия вводится уравнение:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} H(\theta_j - \theta_i)$$

где:

- θ_i – фаза i-го осциллятора,
- ω_i – собственная частота i-го осциллятора,
- $H(\theta_j - \theta_i)$ – функция взаимодействия.

Функция HHH описывает тип взаимодействия и может принимать различные формы, от линейных до нелинейных функций. Функция обычно выбирается в зависимости от типа биологической системы. Эта модель находит широкое применение при моделировании ритмических биологических процессов.

6. Модель нейронной синхронизации

Синхронизация нейронов является важной частью когнитивных процессов в мозге. Нейроны образуют сложные сети и могут синхронизировать свои разряды для передачи информации и формирования координированных действий. Модель нейронной синхронизации часто описывается фазовым уравнением с нелинейными характеристиками, включающим интегро-дифференциальные уравнения.

Одним из примеров такой модели является уравнение нейронного фазового осциллятора:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

где:

- K_{ij} – коэффициент связи между i-м и j-м нейронами.

Эта модель объясняет, как нейроны могут синхронизироваться и формировать устойчивые ритмы. Например, альфа- и бета-ритмы в мозге можно объяснить с помощью подобной модели.

7. Синхронизация в нелинейных цепях

Нелинейные электрические цепи также являются хорошим примером для изучения синхронизации. Для анализа таких цепей часто используется уравнение Рёсслера или уравнение Лоренца, которые представляют собой системы дифференциальных уравнений для описания хаотических колебаний.

Например, уравнения Лоренца:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

где σ, ρ, и β – параметры системы, описывающие хаотическое поведение. При соответствующем значении параметров система может демонстрировать синхронизацию в виде устойчивых циклов и аттракторов.

8. Численные методы для анализа моделей синхронизации

Для анализа моделей синхронизации применяются численные методы, такие как метод Рунге-Кутты, метод конечных разностей и метод Монте-Карло. Эти методы позволяют решать уравнения синхронизации для сложных систем, где аналитические решения невозможны.

- **Метод Рунге-Кутты**: один из самых популярных численных методов для решения систем дифференциальных уравнений. Метод позволяет получить приближенные решения для уравнений, описывающих фазовую и частотную синхронизацию.
- **Метод конечных разностей**: используется для аппроксимации уравнений с частными производными.
- **Метод Монте-Карло**: подходит для статистического моделирования и анализа вероятностных систем.

9. Заключение

Математическое моделирование играет ключевую роль в понимании принципов синхронизации автоколебательных систем. Модели, такие как уравнения Куромото, Ван дер Поля и Пескина, представляют собой мощные инструменты для анализа синхронных процессов в широком диапазоне систем.

Список использованных источников

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.-508p.

2. Rosenblum M., Pikovsky A., Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensemble with global nonlinear coupling //Phys. Rev. Lett.- 2007.-Vol. 98, №6.-P.064101(4).

3. Греченко Т.Н., Психофизиология: учебное пособие. – М.: Гайдарики, 1999. – 358 с.

4. Aschoff J., Daan S., Groos G.A., Vertabrate Circadian Sysytems. Structure and Physihology.- Berlin: Springer,1982.-250p.

5. Moore R.Y., A clock for the ages //Science.- 1999.-Vol. 284.-P.2102-2103.

6. Golomb D., Hansel D., Mato G., Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks in Neuroinformatics and Neural Modeling, ser. Handbook of Biological Physics, F. Moss and S. Gielen, Eds. Amsterdam: Elsevier, 2001.- Vol. 4, pp. 887–968.

7. Strogatz S. H., From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators //Physica D.- 2000.-Vol.143, no. 1-4, pp. 1–20.

8. Ott E., Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 2002.

9. Kuramoto Y., Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.